

文章编号: 1007-4619 (2003)05-0379-07

一种基于小波变换去除遥感图像噪声的方法

侯 波^{1,2}, 迟耀斌^{1,2}, 朱重光², 赵忠明²

(1. 北京遥感信息研究所, 北京 100011; 2. 中国科学院遥感应用研究所, 北京 100101)

摘 要: 采用小波系数极大值跟踪法去除图像噪声, 建立了尺度间小波系数极大值跟踪矩阵, 标识出小波系数极大值的信噪属性, 剔除了噪声部分对应小波系数极大值, 从而抑制了噪声污染。与常规去噪方法相比, 该方法不仅有效地去除了噪声, 同时保持了图像边沿细节, 具有良好的消除噪声效果。

关键词: 小波变换; 极大值; Lipschitz 指数; 奇异性

中图分类号: TP751.1 **文献标识码:** A

1 引 言

噪声是影响图像质量的主要因素之一。传统的基于傅里叶变换的去噪方法在去除噪声和边沿保持上存在着矛盾, 原因是傅里叶变换方法是一种全局变换, 要么完全在时(空间)域, 要么完全在频域, 只能反映图像的整体特征, 无法表述图像的时频局部化特性^[1], 因而, 基于该方法的去噪处理难以检测到图像边沿特征, 在去除噪声的同时, 也损失了图像边沿信息。而小波变换具有时频局部化分析特性, 能够检测到局部突变的边沿特征, 而且可将图像的结构和纹理分别表现在不同分辨率层次上, 因此, 基于小波变换去除噪声的方法可提取并保存对视觉起主要作用的图像边沿信息。

利用小波变换去除图像噪声的基本方法如下(图 1): (1) 图像先经预处理(灰度调整等); (2) 利用小波变换把图像分解到多尺度中; (3) 在每一尺度下

把属于噪声的小波系数去除, 保留并增强属于图像的小波系数; (4) 最后反演恢复图像。显而易见, 其中关键是用什么方法来区分图像和噪声在小波域中对应的小波系数。不同研究者提出过各种不同的方法, Donoho、Johnstone^[2,3], DeVore 和 Lucier^[4] 等人认为边沿细节信息在小波域中对应的系数绝对值较大, 据此采用阈值法去除图像噪声, 该方法去除所有绝对值小于阈值的小波系数, 保留所有绝对值大于阈值的小波系数, 但被保留下来的这部分小波系数还是有相当数量属于噪声。Sanker 等人^[5] 采用“Teager 能量算子”方法剔除噪声和增强信号, 这种方法类似 Donoho、Johnstone 的“小波收缩”方法, 只不过这里进行阈值判别的对象是系数被强化后的局部能量, 而不是系数本身, 但所得结果已不再是真实的信号。Weaver^[6] 通过建立“空间屏蔽滤波器”与各尺度上小波系数相乘, 削弱各尺度上属于噪声的小波系数, 但不能彻底消除噪声影响。



图 1 小波变换去除图像噪声示意图

Fig.1 Block diagram of image denoising by wavelet

本文分析测试了小波域中图像和噪声对应的系数极大值在不同尺度上的分布情况, 研究了它们尺

度间的传递特性: 在从低到高的分解尺度中, 图像突变点对应的小波系数极大值具有传递性, 而噪声突

收稿日期: 2002-02-08; 修订日期: 2002-05-27

作者简介: 侯波(1971-), 男, 山东省济宁市人, 中国科学院遥感应用研究所地图学与地理信息系统博士, 主要从事图像去噪/复原和三维可视化的研究。

变点不具有这种传递性。基于该结论,本文在确定出各尺度小波系数极大值的基础上,由粗及精的跟踪不同尺度上的小波系数极大值,并依据其不同的尺度间传递性,识别信噪属性(信噪属性是指小波系数极大值在空间域中对应的是图像部分还是噪声部分),剔除噪声部分对应的小波系数极大值,从而抑制了噪声,提高了图像质量。

2 利用小波变换检测图像边沿

边沿位于图像灰度变化最大之处(也就是图像灰度突变点),是图像的最主要特征之一,而小波变换具有检测局部突变的能力,因此小波变换是检测边沿的有效工具。

边沿检测一般采用平滑函数的一阶导数作为小波函数^[7],二维函数 $f(x_1, x_2) \in L^2(R^2)$ 表示图像灰度分布,其小波变换有两个分量:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} WT^{(1)}f(a, x_1, x_2) \\ WT^{(2)}f(a, x_1, x_2) \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} [f(x_1, x_2) * * \theta_a^{(1)}(x_1, x_2)] \\ \frac{\partial}{\partial x_2} [f(x_1, x_2) * * \theta_a^{(2)}(x_1, x_2)] \end{bmatrix} \\ &= \text{agrad} [f(x_1, x_2) * * \theta_a(x_1, x_2)] \\ &= \text{agrad} [f^s(x_1, x_2)] \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\theta(x_1, x_2)$ 表示平滑函数, $* *$ 代表二维卷积,通常 a 取为 $2^j (j \in \mathbb{Z})$ 。式(1)表明: $WT^{(1)}f(\cdot)$ 和 $WT^{(2)}f(\cdot)$ 分别反映了图像灰度沿 (x_1, x_2) 方向梯度。

可见一幅图像在不同尺度下的小波变换结果 $WT^{(1)}f(\cdot)$ 和 $WT^{(2)}f(\cdot)$ 反映了 $f^s(x_1, x_2)$ 沿 x_1, x_2 方向的梯度;而边沿位于图像灰度变化率(梯度)最大之处,因此,图像边沿在小波域中对应系数的局部极大值点。

3 图像和噪声的奇异性分析

设信号 $x(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 的 Lipschitz 指数为 α , 则:

$$|WTx(a, t)| \leq Ka^\alpha \quad (2)$$

也就是

$$\log |WTx(a, t)| \leq \log K + \alpha \log a \quad (3)$$

式中 K 是一个与所用小波函数 $\varphi(t)$ 有关的常数, a 为分解尺度。当 $a=2^j$ 时,上式变成

$$|WTx(2^j, t)| \leq K2^{j\alpha} \quad (4)$$

或

$$\log_2 |WTx(2^j, t)| \leq \log_2 K + j\alpha \quad (5)$$

该式给出小波系数的对数值随尺度 j 或 a 的变化规律,此规律从小波系数极大值上表现得最为明显。它反映:当 $\alpha > 0$ 时,小波系数极大值将随尺度 a 的增大而增大;当 $\alpha < 0$ 时,则随 a 的增大而减小。

信号的突变点在小波域中表现为系数幅值的局部极大值点(下文称极大值),信号在突变点处的 Lipschitz 指数是正的,而白噪声分布函数的 Lipschitz 指数 $(-1/2 - \epsilon (\epsilon > 0))$ 是负的^[7]。图像是关于像素灰度值分布的二维信号,图像的边沿位于灰度变化最大之处,是图像灰度突变点,在小波域中对应系数的极大值点,因此,图像在边沿处具有正的 Lipschitz 指数,同时在上文中针对信号分析的结论同样适用于二维图像,也就是说,图像边沿对应的小波系数极大值随着尺度的增大而增大,而白噪声对应的小波系数极大值随着尺度的增大而减小,当分解尺度增大到某个尺度时,绝大部分白噪声对应的小波系数极大值因衰减而消失,由此认为,当尺度增大时,如果某些小波系数极大值点的幅值急剧减小或该点消失,则表明对应的奇异性有负的 Lipschitz 指数,这些极大值点几乎受白噪声支配,应被去除^[8]。总之,在从低到高的分解尺度中,图像边沿在小波域中对应的系数极大值具有尺度间传递性,而噪声突变点不具有这种传递性,因而,在大尺度下剩余的极大值主要属于图像。

针对信号(图像)与噪声(本文处理的噪声模型主要针对高斯白噪声)在小波域中对应的系数极大值不同的传递性,首先以一维信号为例进行验证,图 2 和图 3 分别为信号和含噪信号及其小波变换高频系数波形图,信号选用 Blocks (Matlab 软件处理信号),含噪信号则是由 Blocks 信号加入高斯白噪声生成,两图中, s 表示信号或含噪信号波形图, $cd1, cd2, \dots, cd6$ 分别是小波变换在分解尺度 1, 2, \dots , 6 上的高频系数波形图。在图 2 中,信号 s 不含噪声,由 $cd1, cd2, \dots, cd6$ 的波形图可见:零值(或小数值)小波系数对应信号平坦区域;系数极大值反映信号的局部突变(由位置对应),某一尺度上的极大值在其他尺度的相应位置也存在极大值,只不过幅度随着尺度增大而增大。显然,信号在小波域中对应的系数极大值在分解尺度间具有传递性。在图 3 中,由于信号中加入高斯白噪声,与图 2 相比可见:在 $cd1, cd2, cd3$ 和 $cd4$ 中,极大值点的数量大大增

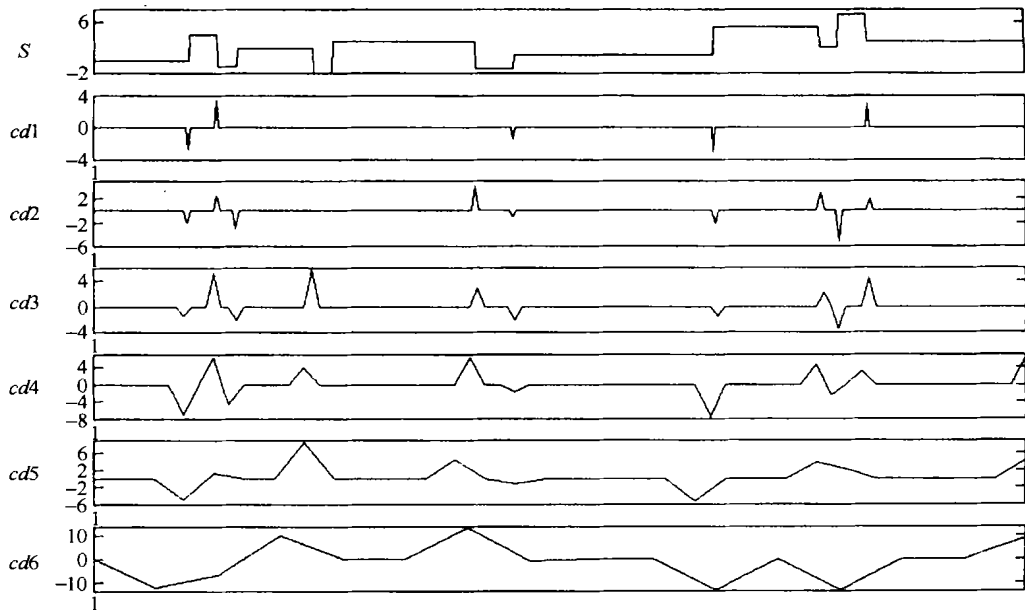


图2 信号和其小波变换分解高频系数波形图(信号:Blocks)

Fig.2 Signal and wavelet coefficients of high frequency

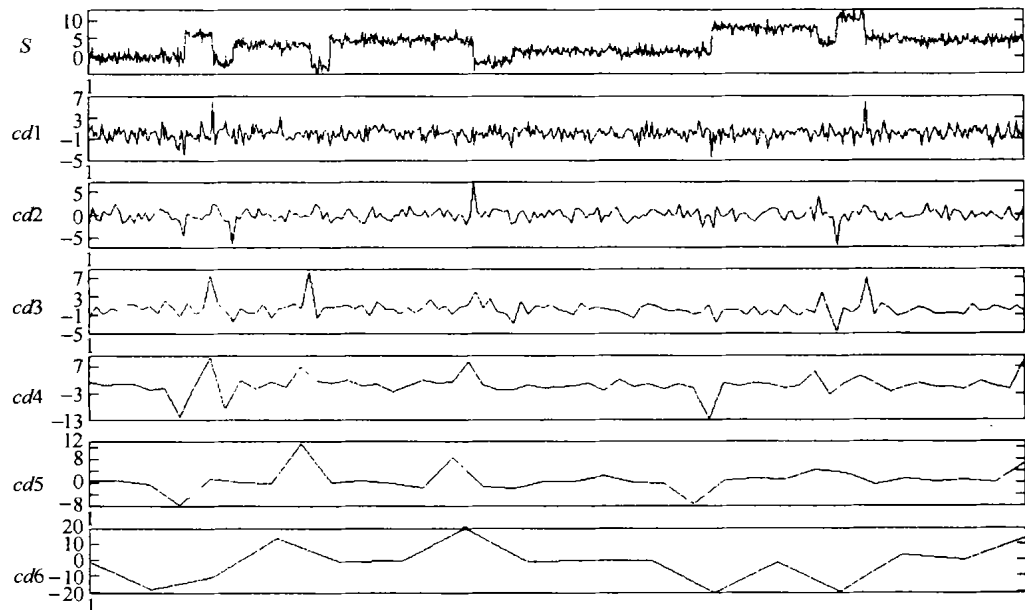


图3 含噪信号和其小波变换分解高频系数波形图(信号:Blocks)

Fig.3 Noisy signal and wavelet coefficients of high frequency

加;但随着分解尺度的增大, $cd5$ 的波形与图 2 中的 $cd5$ 的波形基本一致,而且极大值的数量、幅值和位置完全一致,但与本图中的 $cd1$, $cd2$, $cd3$ 和 $cd4$ 相比,极大值点的数量大大减少; $cd6$ 的波形与图 2 中 $cd6$ 的波形完全一致。显然 $cd1$, $cd2$, $cd3$ 和 $cd4$ 中增加的极大值点,反映了噪声的突变特性,受噪声支

配,而随着分解尺度的增大,极大值点的数量急剧减少,在 $cd5$ 和 $cd6$ 中,极大值点都是反映信号本身的突变,与噪声干扰无关,因此,反映噪声突变的极值点仅包含在小尺度的高频系数中,但随着分解尺度的增大,反映噪声突变的极值点的幅值急剧衰减,数量随之减少,这说明,噪声在小波域中

对应的系数极大值点在分解尺度间不具有传递性。综合以上对图 2 和图 3 的分析结论可知:信号在小波域中对应的系数极大值具有尺度间传递性,而噪声则不具有这种传递性,在大尺度中,极大值主要属于信号。

图像是关于像素灰度值分布的二维信号,二维图像数据的小波分析是一维信号小波理论的扩展延伸,因此,一维信号的小波分析特性同样适用于二维图像数据小波变换处理。由于二维图像数据的小波系数极大值不能以一维信号波形图的形式形象表示,另外,本文通过与阈值比较的方法近似检测极大值,由于极大值的检测具有近似性,无法准确标示出尺度间极大值的位置对应性,文中不再作尺度间极大值示意图比较,仅作无污染图像和噪声图像在小波域中单尺度分解的高频分量系数极大值分布比较说明,图 4 和图 5 为小波变换在尺度 5 上系数极大值分布图(白像素表示系数极大值, H 为水平高频系数, V 为垂直高频系数, D 为斜线高频系数),数据源分别是无噪声污染的 Ic.tif 图像和纯高斯白噪声图像,图 4 中的极大值点数目远多于图 5,图 5 中仅有极少数的极大值,这说明随着尺度 α 的增大只有少数的白噪声的极大值传递下来,在大尺度中剩余的极大值主要属于图像。

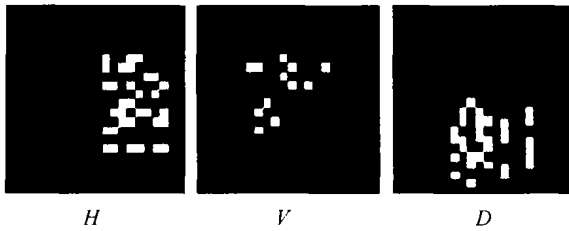


图 4 小波域尺度 5 上系数极大值图(图像:Ic.tif)
Fig.4 The Coefficients' extremums on scale 5 in wavelet domain(Ic.tif)

$$WT'(j, k) = \begin{cases} \text{Sign}(WT(j, k)) \cdot (|WT(j, k)| - Thr)_+ & \text{when } |WT(j, k)| > Thr \\ 0 & \text{when } |WT(j, k)| \leq Thr \end{cases} \quad (6)$$

其中, $WT(j, k)$ 为小波系数; $WT'(j, k)$ 为修正后的小波系数; Thr 为阈值。

4.2 图像极大值跟踪

设对图像作尺度 N 的小波变换分解,在尺度 $n(n=N, N-1, N-2, \dots, 1)$ 上, $A(n)$ 为低频系数, $H(n)$ 为水平高频系数, $V(n)$ 为垂直高频系数, $D(n)$ 为斜线高频系数。图像极大值跟踪矩阵 P 首先由尺度 N 上小波系数极大值确定,对于 $H(N)$,如

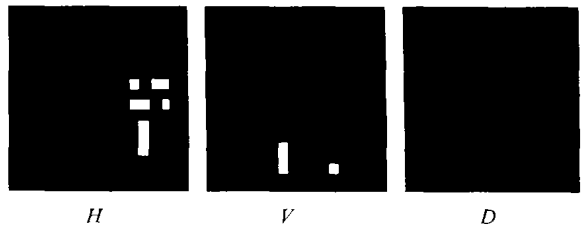


图 5 小波域尺度 5 上系数极大值图(图像:(0,0.05)高斯白噪声)

Fig.5 The Coefficients' extremums on scale 5 in wavelet domain ((0,0.05)white Gaussian noise)

4 去噪处理算法

去噪处理由 3 部分组成:小波系数极大值确定、图像极大值(是指图像在小波域中对应的系数极大值)跟踪和噪声极大值(是指噪声在小波域中对应的系数极大值)滤除。小波系数极大值确定是利用阈值法求出各尺度上小波系数的极大值;极大值跟踪是由粗及精跟踪不同尺度上的小波系数极大值,识别其信噪属性;噪声极大值滤除则是去除不具有尺度间传递性的小波系数极大值。

4.1 小波系数极大值确定

通常采用阈值法,绝对值大于阈值的小波系数近似认为是极大值(图 4、图 5 均采用此方法)。关于阈值设置求取的算法层出不穷,1993 年 Donoho^[2]提出以 $\sigma \sqrt{2 \log(n)}$ 作为全局阈值,后来 DeVore 和 Lucier^[4]在处理二维数据时调整该阈值为 $C\sigma \sqrt{2 \log(n)}$ (C 是可变系数)。经实验测试^[9],文中选取 $C=0.3$,由于经硬阈值处理的重构图像较粗糙,文中采用软阈值处理见公式(6)。

果 (i, j) 处存在极大值,则 $P_{H, N}(i, j) = 1$,反之, $P_{H, N}(i, j) = 0$;以此类推于 $V(N), D(N)$,可求得 $P_{V, N}$ 和 $P_{D, N}$,尺度 $N-1$ 上极大值跟踪矩阵由以下公式求得:

$$\begin{aligned} P_{H, n-1}(2 * i, 2 * j) &= P_{H, n}(i, j) \\ P_{V, n-1}(2 * i, 2 * j) &= P_{V, n}(i, j) \\ P_{D, n-1}(2 * i, 2 * j) &= P_{D, n}(i, j) \end{aligned} \quad (7)$$

$(n = N, N-1, N-2, \dots, 1)$

式中, $P_{C,n}(C=H, V \text{ 或 } D)$ 为极大值跟踪修正矩阵, $P_{H,n}(i, j)(C=H, V \text{ 或 } D)$ 为极大值跟踪矩阵, 通过上式可求得尺度 $N-1, N-2, \dots, 1$ 上的极大值跟踪矩阵。

由于受到各种因素的干扰, 有时第 j 级的极值点在第 $j-1$ 级找不到对应的极值点。而通过式(7)求得极大值跟踪矩阵, 当 $n < N$, 递归求得极大值坐标分布在 $i * 2^{N-n}$ 行, $j * 2^{N-n}$ 列, 而与实际不同尺度空间上的图像小波系数极大值坐标有可能存在偏差, 因此, 有必要对由式(7)求得极大值跟踪矩阵进行修正, 如果 $P_{C,n}(i, j)(C=H, V \text{ 或 } D) = 1$, 而在 $C(n)$ 上 (i, j) 处找不到极大值点, 这时可在以 (i, j) 为中心的邻域 $(n_1 * n_1)$ 寻找极大值点, 若在邻域中 $(m * n)$ 处存在极大值点, 则令 $P_{C,n}(i, j)(C=H, V \text{ 或 } D) = 0$, $P_{C,n}(m, n)(C=H, V \text{ 或 } D) = 1$, 反之, $P_{C,n}(i, j)(C=H, V \text{ 或 } D) = 0$ 。极大值跟踪矩阵求解顺序由尺度 $N, N-1, N-2, \dots, 1$ 依次递减, 修正矩阵求解顺序由尺度 $N-1, N-2, \dots, 1$ 依次递减。文中 n_1 取 3。

4.3 噪声极大值滤除

小波变换是线性变换, 而观察到的图像又是由原始图像和噪声线性组合而成(噪声为加性噪声), 因此, 图像的小波系数由原始图像的小波系数和噪

声的小波系数相加组成。由第3节的分析可知, 如果噪声是白噪, 随着小波变换尺度加大, 它的极大值点会显著减少。这样, 在大尺度下剩余的极大值主要属于图像。依据该原理, 可采用由粗及精的方法跟踪各尺度小波变换极大值, 识别极大值的信噪属性, 并将属于噪声部分的极大值去除。

区分极大值的信噪属性由 $P_{C,n}(C=H, V \text{ 或 } D, n=N, N-1, N-2, \dots, 1)$ 来确定, 在 $C(n)$ 上 (i, j) 处存在极大值, 同时 $P_{C,n}(i, j)(C=H, V \text{ 或 } D) = 1$, 则该极大值属于图像部分, 予以保留, 如若 $P_{C,n}(i, j)(C=H, V \text{ 或 } D) = 0$, 则认为属于噪声部分, 予以剔除。

5 实验结果

我们分别对加入不同程度噪声的图像和采用不同去噪方法进行实验测试, 并对测试结果作了误差分析。测试结果见图6和图7, 两图中(a)是原始图像, 图像(b)是噪声图像, (c)~(f)图像分别是经中值滤波(Medfil)、均值滤波(Meanfil)、常规小波变换去噪(wavelet)和采用本文方法(Ledenoise)去噪结果图像。图6中(a)是 woman.tif 图像, 加入 $(0, 0.05)$ 高斯白噪声生成含噪图像(b); 图7中(a)是遥感图像, 加入 $(0, 0.02)$ 高斯白噪声生成含噪图像(b)。由图6

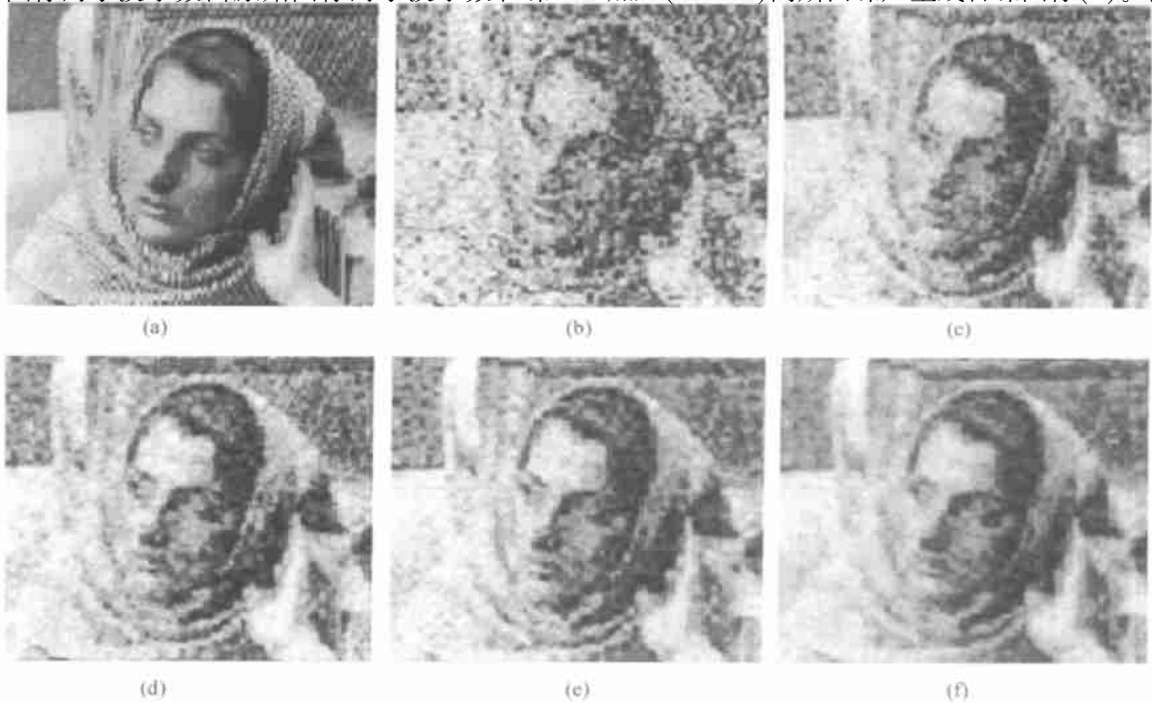


图6 清噪结果图像
Fig.6 Comparing the result of the various methods on image(woman)

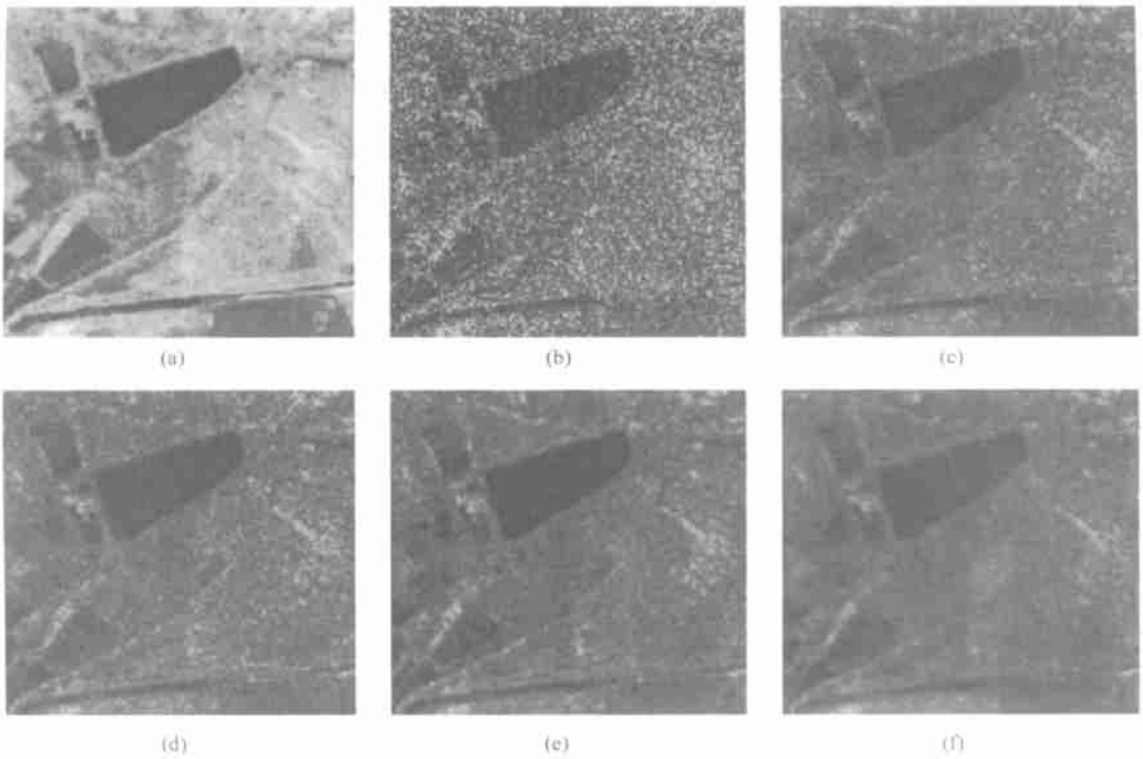


图 7 消噪遥感图像

Fig.7 Comparing the result of the various methods on the image of remote sensing

和图 7 可见,经本文方法处理图像质量和清晰度也明显优于其他 3 种方法。表 1、表 2 分别是以 woman.tif 和遥感图像为处理对象采用不同去噪方法和加入不同高斯白噪声 ($0, \sigma^2$) 相对误差数据,相对误差由式(8)求得。表 1 中,除 $\sigma^2=0.01$ 外,本文去噪方法的误差均小于另外 3 种方法,表 2 中,本文去噪

方法的误差均小于另外 3 种方法。因此,本文小波变换去噪方法能够更有效地抑制噪声和逼近原始图像。

相对误差公式:

$$\lambda = \frac{\|X - X_{\text{denoise}}\|_F}{\|X\|_F} \quad (8)$$

式中: X 是原始图像(不含噪声), X_{denoise} 是经过阈值处理的去噪图像, $\|\cdot\|_F$ 是 Frobenius 范数。

表 1 相对误差统计表(woman.tif)

Table 1 Relative errors(woman.tif)

Error \ σ^2	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
Wavelet	0.1905	0.1990	0.2046	0.2083	0.2145	0.2191	0.2234	0.2280	0.2320	0.2350
Medfil	0.1813	0.2004	0.2181	0.2308	0.2462	0.2587	0.2705	0.2804	0.2932	0.3051
Meanfil	0.1748	0.1868	0.1974	0.2044	0.2146	0.2221	0.2290	0.2363	0.2421	0.2483
Ledenoise	0.1805	0.1853	0.1864	0.1920	0.1966	0.2009	0.2055	0.2086	0.2117	0.2164

表 2 相对误差统计表(遥感图像)

Table 2 Relative errors(the image of remote sensing)

Error \ σ^2	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
Wavelet	0.0994	0.1146	0.1265	0.1385	0.1484	0.1564	0.1615	0.1715	0.1780	0.1829
Medfil	0.1012	0.1167	0.1277	0.1397	0.1497	0.1577	0.1628	0.1728	0.1793	0.1842
Meanfil	0.0995	0.1249	0.1443	0.1620	0.1763	0.1887	0.1972	0.2091	0.2175	0.2239
Ledenoise	0.0987	0.1098	0.1198	0.1282	0.1362	0.1420	0.1467	0.1559	0.1602	0.1635

6 结 论

常规的去噪处理方法:中值滤波、均值滤波和低通滤波等,在去除噪声的同时,也牺牲了图像边沿等细节,大大降低图像清晰度。另外常规小波变换去噪方法,不区分小波系数极大值的属性,保留了所有极大值,约束降噪力度,处理后图像依然较明显存在噪声。本文方法在分析图像与噪声的奇异性基础上,建立了图像极大值跟踪矩阵,标识出极大值的信噪属性,加权于消噪处理分析,提高了小波变换去噪能力,保持了图像边沿细节。

参 考 文 献 (References)

- [1] Hu Changhua, Zhang Junbo, Xia Jun *et al.* System Analysis and Design on MATLAB: Wavelet Analysis [M]. Xi'an: University of Electronic Science and Technology of Xi'an Press, 1997. [胡昌华, 张军波, 夏军等. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——小波分析 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1999.]
- [2] Donoho D L. Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data. Proc. of Symposia in Applied Mathematics, vol 47, 1993
- [3] Donoho D L. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage [J]. *J. Amer. Stat. Assoc.* 1995.
- [4] DeVore R A, J Lucier B. Fast Wavelet Techniques for Near-Optimal Image Processing [A]. Proc IEEE Mil. Commun. CONF., IEEE Communications Society [C]. 1992.
- [5] Sanker B. *et al.* Multiresolution Biological Transient Extraction Applied to Respiratory Crackles [J]. *Comput. Biol. Med.* 1996. 26(1):25-39.
- [6] J Weaver. Filtering noise from images with wavelet transform [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*. 21, 288-295, 1995.
- [7] Yang Fusheng. Engineering Analysis and Application of Wavelet Transform [M]. Beijing: Science press, 1999. [杨福生. 小波变换的工程分析与应用 [M]. 北京:科学出版社, 1999.]
- [8] Li Jianping. Wavelet Analysis and Singal Processing: Theory, Application and Software Realizing [M]. Chongqing: Chongqing Press, 1997. [李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现 [M]. 重庆:重庆出版社, 1997.]
- [9] Hou Bo, Chi Yaobin, Zhu Chongguang. A Denoising Method for Image Data by Wavelet Transform [J]. *Chinese Journal of Stereology and Image Analysis*, 2002. 7(2) [侯波, 迟耀斌, 朱重光. 一种基于小波变换消除图像噪声方法 [J]. 中国体视学与图像分析, 2002. 7(2)]
- [10] Hummel R. Reconstruction from Zero-crossings in Scale Space [J]. *IEEE Trans*, 1989. ASSP-37(12)
- [11] Coinfman R R, Donoho D L. Ideal Translation Invariant Denoising [C]. Springer Verlag, 1995.
- [12] Donoho D L. Wavelet Analysis [J]. *IEEE Spectrum*, 1996, 33(10).
- [13] Yan Qingjin. Numerical Value Analysis [M] Beijing: Beijing Navigation and Spaceflight University Press, 2000. [颜庆津. 数值分析 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2000.]
- [14] Kenneth R. Castleman. Digital Image Processing [M]. Beijing: Electron Industry Press, 1998. [Kenneth R Castleman. 数字图像处理 [M]. 北京:电子工业出版社, 1998.]

Remote Sensing Image Denoising in the Wavelet Domain

HOU Bo^{1,2}, CHI Yao-bin^{1,2}, ZHU Chong-guang², ZHAO Zhong-ming²

(1. Beijing Remote Sensing Information Institute, Beijing 100011, China;

2. Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China)

Abstract: In this paper, we propose a new denoising method, which distinguishes the coefficients' extremums belonging either to image or to noise by the tracking matrixes of the extremums in wavelet domain. The coefficients' extremums that belong to image have transmission property from coarse to fine scale, but the coefficients' extremums that belong to noise do not have. We evaluate the tracking matrixes of the extremums different number base on the transmission property of each extremums from coarse to fine scale. The tracking matrixes of the extremums express the different transmission property. By the tracking matrixes of the extremums, we differentiate the wavelet coefficients' extremums and then remove the coefficients' extremums belonging to noise. Experimental results show that the denoising proposed in this paper is effective both in reserving the edge and in removing noise.

Key words: Wavelet transformation, Extremum, Lipschitz exponent, Singular points